Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Гаврилків Володимир Михайлович

УДК 512.53

АЛГЕБРО-ТОПОЛОГІЧНІ СТРУКТУРИ НА СУПЕРРОЗШИРЕННЯХ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2009

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних, професор
Банах Тарас Онуфрійович,
професор кафедри геометрії і топології
Львівського національного університету
імені Івана Франка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Протасов Ігор Володимирович,
провідний науковий співробітник
кафедри дослідження операцій
Київсього національного університету
імені Тараса Шевенка.

кандидат фізико-математичних наук
Равський Олександр Віталійович,
науковий співробітник
відділу функціонального аналізу
Інституту прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача НАН України

Захист відбудеться 1 жовтня 2009 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий 3 серпня 2009 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Б.А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Після того як Ґелвін і Ґлезер придумали топологічне доведення теореми Гайдмена, топологічні методи стали стандартним інструментом в сучасній комбінаториці чисел. Визначальним є той факт, що кожна напівгрупова операція *, визначена на дискретному просторі S, продовжується до правотопологічної напівгрупової операції на $\beta(S)$, компактифікації Стоуна-Чеха простору S. Наділена продовженою операцією, компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(S)$ перетворюється на компактну гаусдорфову правотопологічну напівгрупу. Оскільки напівгрупа $\beta(S)$ компактна, то вона містить ідемпотенти, мінімальні (ліві) ідеали, і т.д., існування яких має важливі комбінаторні застосування.

Дослідженням проблем комбінаторики з допомогою ультрафільтрів займаються такі всесвітньо відомі математики як І. Протасов (Україна), Є. Зеленюк (Україна-ПАР), Н. Гайдмен (США), Д. Штраус (Англія), С. Феррі (Італія-Великобританія-Колумбія) та багато інших.

Компактифікацію Стоуна-Чеха $\beta(S)$ можна розглядати як підмножину другої степінь-множини P(P(S)). Степінь-множина P(X) довільної множини X (зокрема, X=P(S)) має природну компактну топологію, успадковану з канторового куба $\{0,1\}^X$ після ототожнення кожної підмножини $A \subset X$ з її характеристичною функцією. Степінь-множина P(X) є повною дистрибутивною ґрат кою по відношенню до операцій перетину і об'єднання.

Найменша повна підґратка ґратки P(P(S)), що містить $\beta(S)$, збігається з простором G(S) гіперпросторів включення, добре вивченим об'єктом категорної топології. За означенням, сім'я $\mathcal{A} \subset$ P(S) не порожніх підмножин S називається *гіперпростором включення*, якщо разом з кожною множиною $A \in \mathcal{A}$ вона містить усі надмножини множини A в S.

Завданням дисертаційного дослідження є показати, що асоціативна бінарна операція, визначена на дискретному просторі S, продовжується не тільки на $\beta(S)$, але також і на найменшу повну підґратку $G(S) \subset P(P(S))$, породжену множиною $\beta(S)$, а також вивчити алгебраїчну та алгебро-топологічну структуру одержаних напівгруп. Наділений продовженою операцією, простір гіперпросторів включення G(S) є суперкомпактною правотопологічною напівгрупою, що містить $\beta(S)$ як замкнену піднапівгрупу. Крім $\beta(S)$, напівтрупа G(S) містить багато інших важливих підпросторів в якості замкнених піднапівгруп: суперрозширення $\lambda(S)$ простору S, простір $N_k(S)$ k-зчеплених гіперпросторів включення, простір Fil(S) фільтрів на S (який містить ізоморфну копію глобальної напівгрупи $\Gamma(S)$ напівгрупи S), і т.д. Вищезазначене доводить актуальність дисертаційного дослідження, обумовлює його структуру.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проведене в рамках плану наукової роботи кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за проектом Державного фонду фундаментальних досліджень № 25.1/099 "Узагальнення ймовірнісних мір, їх категорні і фрактальні властивості, наближення і застосування", номер державної реєстрації 0108U009228, а також в рамках плану наукової роботи кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка МТ224Ф "Тополого-алгебраїчні структури та їх застосування", номер державної реєстрації 0104U002128.

Мета і задачі дослідження. Дисертаційне дослідження має на меті продовження асоціативної бінарної операції, заданої на дискретному просторі S, до напівгрупової право топологічної операції на просторі гіперпросторів включення G(S) та його підпросторах; вивчення структур одержаних напівгруп. Для досягнення поставленої мети в дисертації потрібно розв'язати такі задачі:

— продовжити асоціативну бінарну операцію, задану на дискретному топологічному просторі S, до напівгрупової правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення G(S) та його підпросторах;

— дослідити алгебраїчні та алгебро-топологічні властивостінапівгруп G(S);

— дослідити алгебраїчні та алгебро-топологічні властивості суперрозширень λ(S) груп S.

Об'єкт дослідження - суперрозширення груп, напівтрупи гіперпросторів включення і максимальних зчеплених систем.

Предмет дослідження - алгебраїчна структура напівтруп гіперпросторів включення і максимальних зчеплених систем.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі широко використовуються методи теорії груп та напівгруп, теорії правотопологічних напівгруп, теорії категорій, функторів і монад, загальної топології, загальні теоретико-множинні, комбінаторні та тополого-алгебраїчні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації вперше отримано такі результати:

— продовжено асоціативну бінарну операцію, задану на дискретному топологічному просторі S, до напівгрупової правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення G(S) та його підпросторах;

— вивчено самозачеплені множини в групах і обчислено їх мінімальну потужність для деяких груп;

— описано мінімальні (ліві) ідеали, топологічні та алгебраїчні центри, скоротні справа (зліва) елементи, праві (ліві) нулі, комутативність напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем;

— доведена топологічна ізоморфність мінімальних (лівих) ідеалів напівгруп $\lambda(Z)$ та $\lambda(Z_2)$, де Z_2 — група цілих 2-адичних цілих чисел;

— повністю описано структуру скінченних напівгруп гіперпросторів включення $G(H)$ та суперрозширення $\lambda(H)$ для груп H малих порядків.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані в комбінаториці чисел, теорії груп та правотопологічних напівгруп, теорії категорій і функторів; результати здобули міжнародне визнання, зокрема цитувалися в огляді[1].

Особистий внесок здобувача. Результати, викладені у дисертації, отримані здобувачем самостійно. В опублікованих спільно з Т.О. Банахом та О.Р. Никифорчиним статтях співавторам належать постановка задач та обговорення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

— VI міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Кам'янець-Подільський, 1-7 липня 2007 р.);

— V літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (Козьова, 6-18 серпня 2007 р.);

— зимовій школі з абстрактного аналізу (топологічна частина) в Чеській Республіці (Гейніце, січень 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", присвяченої 80-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача (Львів, 25-29 травня 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Аналіз та топологія" (Львів, 2-7 червня 2008 р.);

— на конференції "Теорія множин, топологія та банахові простори" в Республіці Польща (Кельце, 7-11 липня 2008 р.);

— VI літній школі "Теорія множин і нескінченна комбінаторика" в Республіці Польща (Тереміскі, 23-30 серпня 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Нескінченновимірний аналіз та топологія" (Яремче, 27 травня – 1 червня 2009 р.);

— на засіданнях наукового семінару факультету математики та інформатики та звітних конференціях Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2005 - 2008 рр.).

Публікації. За матеріалами проведених досліджень опубліковано 5 статтей та 6 тез доповідей конференцій. Серед публікацій 5 праць у наукових виданнях з переліку, затвердженого ВАК України.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 69 найменувань (на 6 сторінках). Повний обсяг роботи становить 140 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX .

[1]Hindman N. *Algebra in the space of ultrafilters and Ramsey Theory* / N. Hindman, D. Strauss // Contemp. Math. (to appear).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження.

У **першому розділі** зроблено огляд літератури за темою дослідження, наведено основні результати дисертаційної роботи та вказано їх місце серед інших досліджень у даній галузі.

У **другому розділі** сформульовано необхідні означення і наведено допоміжні відомості, які використовуються в подальших дослідженнях.

Множину X, наділену бінарною операцією $*: X\times X \to X$, називатимемо *магмою*. Підмножина A магми (X, *) називається *підмагмою* X, якщо $A*A \subset A$, де $A*A=\{a*b : a,b\in A\}$. Якщо операція є асоціативною, то X називається *напівгрупою*. Непорожня підмножина I магми (X, *) називається *ідеалом* (відповідно *правим ідеалом, лівим ідеалом*), якщо $I*X\cup X*I \subset I$ (відповідно $I*X \subset I$, $X*I \subset I$). Елемент z магми (X, *) називається *нулем* (відповідно *лівим нулем, правим нулем*) в X, якщо $x*z=z*x=z$ (відповідно $z*x=z$, $x*z=z$) для кожного $x\in X$. Кожен правий чи лівий нуль $z\in X$ є *ідемпотентом* в тому розумінні, що $z*z=z$.

Магма X називається *квазігрупою*, якщо для кожних $a,b\in X$ система рівнянь $a*x=b$ і $y*a=b$ має єдиний розв'язок $(x,y) \in X \times X$.

За означенням, *правотопологічною магмою* називається топологічний простір S, наділений такою бінарною операцією $*: S \times S \to S$, що для кожного $a\in S$ правий зсув $r_a : S \to S$, $r_a : x \to x*a$, є неперервним. Якщо бінарна операція $* : S \times S \to S$ є неперервною, то (S, *) називається *топологічною магмою*. Якщо ця операція є асоціативною, то говоримо про *(право)топологічні напівгрупи*.

Через P(X) позначимо множину всіх підмножин множини X. За означенням, сім'я $A \subset P(X)$ непорожніх підмножин множини X називається *гіперпростором включення*, якщо разом з кожною множиною $A\in \mathcal{A}$ сім'я $\mathcal{A}$ містить усі надмножини множини A в X. Кожна сім'я $\mathcal{B}$ підмножин множини X породжує гіперпростір включення

$$< \mathcal{B} > = \{A \subset X : B \subset A \text{ для деякого } B \in \mathcal{B}\}$$

У цьому випадку $\mathcal{B}$ називається *базою* гіперпростору включення $\mathcal{A} = < \mathcal{B} >$.

Множина всіх гіперпросторів включення на X позначається через G(X) і наділяється топологією, яка породжується передбазою, що складається з множин вигляду

$$U^+ = \{ \mathcal{A} \in G(X) : U \in \mathcal{A} \} \text{ і } U^- =\{ \mathcal{A} \in G(X) : \forall\, B \in \mathcal{A} \;\; B\cap U \neq \varnothing\},$$

де U пробігає сім'ю усіх підмножин множини X.

Сім'я $\mathcal{L}$ підмножин множини X називається *зчепленою системою* на X, якщо будь-які два елементи цієї сім'ї перетинаються. Зчеплена система $M \subset P(X)$ називається *максимальною зчепленою системою*, якщо вона не є власною підмножиною жодної іншої зчепленої системи. Множина всіх максимальних зчеплених систем в G(X) називається *суперрозширенням* простору X, позначається $\lambda(X)$ і наділяється топологією, індукованою з G(X).

Сім'я $\mathcal{F}$ непорожніх підмножин множини X називається *фільтром*, якщо вона є замкненою відносно скінченних перетинів і взяття надмножин. Фільтр $\mathcal{U}$ називається *ультрафільтром*, якщо $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ для кожного фільтра $\mathcal{F}$ з $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Через $\beta(X)$ позначається множина всіх ультрафільтрів на множині X. Ультрафільтр, який складається з усіх надмножин множини $\{x\} \subset X$ називається *головним ультрафільтром*, породженим точкою x. Ультрафільтри, які не є головними, називаються *вільними*. Відмітимо, що для довільної множини X має місце ланцюжок вкладень $X \subset \beta(X) \subset \lambda(X) \subset G(X)$.

В **третьому розділі** вивчаються деякі топологічні властивості простору G(X) гіперпросторів включення.

Теорема 3.2.1. *Простір G(X) є суперкомпактним.*

Нагадаємо, що топологічний простір називається *суперкомпактним*, якщо з довільного відкритого покриття елементами деякої його передбази можна вибрати двоелементне підпокриття.

Простір G(X) має цікаву алгебраїчну структуру. Він володіє двома бінарними операціями

$$\cup : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cup : (\mathcal{F}, \mathcal{U}) \to \mathcal{F} \cup \mathcal{U},$$

$$\cap : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cap : (\mathcal{F}, \mathcal{U}) \to \mathcal{F} \cap \mathcal{U},$$

і однією унарною операцією

$$\perp : G(X) \to G(X), \quad \perp : \mathcal{F} \to \perp\mathcal{F} = \{ E \subset X : \forall F \in \mathcal{F} \ E \cap F \neq \varnothing \},$$

що називається *операцією трансверсалі*.

Множина G(X) всіх гіперпросторів включення на X є підмножиною P(P(X)) (яка є повною дистрибутивною ґраткою) і замкнена відносно операцій об'єднання і перетину (довільних сімей гіперпросторів включення).

Твердження 3.6.5. Ґратка G(X) збігається з найменшою повною підґраткою ґратки P(P(X)), яка містить всі ультрафільтри.

Основним результатом третього розділу є дуальна характеризація гіперпросторів включення зі скінченними носіями. Кажемо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ має *скінченний носій в* X, якщо $\mathcal{A} = \langle \mathcal{F} \rangle$ для деякої скінченої сім'ї $\mathcal{F}$ скінченних підмножин простору X. Через $G^{\bullet}(X)$ позначимо підпростір простору G(X), який містить усі гіперпростори включення зі скінченними носіями в X.

Теорема 3.7.1. *Гіперпростір включення $\mathcal{F}$ має скінченний носій тоді і тільки тоді, коли гіперпростори включення $\mathcal{F}$ і $\perp\mathcal{F}$ мають бази, що складаються зі скінченних множин.*

Ця характеризація суттєво використовується в теоремі 4.6.1 для опису топологічного центру магми G(X) над квазігрупою X.

У **четвертому розділі** показано, що бінарна операція, визначена на дискретному топологічному просторі X, продовжується не тільки на $\beta(X)$[2], але також і на найменшу повну підґратку $G(X) \subset P(P(X))$, що містить $\beta(X)$. Ми вивчаємо деякі важливі властивості напівгрупової операції на G(X) і їх взаємозв'язок з ґратковою структурою G(X), а також описуємо структуру напівгруп G(X).

В підрозділі 4.1, маючи бінарну операцію $* : X \times X \to X$ на дискретному просторі X, ми продовжуємо її до право топологічної операції на G(X), використовуючи ту ж формулу, що і для множення ультрафільтрів, а саме: добуток $\mathcal{U}\circ\mathcal{F}$ двох гіперпросторів включення $\mathcal{U}$ і $\mathcal{F}$ визначається формулою

$$\mathcal{U}\circ\mathcal{F} = \langle \bigcup_{x\in U} x * F_x : U \in \mathcal{U},\ \{F_x\}_{x\in U} \subset \mathcal{F} \rangle.$$

Твердження 4.1.1. *Якщо операція * на X асоціативна, то такою ж є індукована операція ∘ на G(X).*

Твердження 4.1.6. *Для кожної дискретної магми (X, *) простір G(X), наділений продовженою операцією ∘, є правотопологічною магмою, топологічний центр якої містить X.*

В підрозділі 4.3 показано, що для магми X, наділеної дискретною топологією, всі (топологічно) замкнені підпростори простору G(X), розглянуті в підрозділі 3.8, зокрема, суперрозширення $\lambda(X)$ і компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(X)$, є підмагмами G(X).

Кажемо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є *інваріантним*, якщо для кожного $A \in \mathcal{A}$ і $x \in X$ множини $x*A$ і $x^{-1}A = \{ y \in X : x*y \in A\}$ належать до $\mathcal{A}$.

[2]Hindman N. *Algebra in the Stone-Cech compactification* / N. Hindman, D. Strauss. — Berlin, New York: de Gruyter, 1998. — 485 p.

Твердження 4.4.1. *Гіперпростір включення $A \in G(X)$ є правим нулем в $G(X)$ тоді і тільки тоді, коли A є інваріантним.*

Через $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ позначимо множину всіх інваріантних гіперпросторів включення в G(X). З твердження 4.4.1 випливає, що $A \circ B = B$ для кожних A, $B \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$. Таким чином, $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є напівгрупою правих нулів.

Твердження 4.4.2. *Множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є замкненою в $G(X)$, є напівгрупою правих нулів магми $G(X)$ і замкненою повною підґраткою ґратки $G(X)$, яка інваріантна відносно трансверсалі. Більше того, якщо $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є непорожньою, то вона є лівим ідеалом, що лежить в кожному правому ідеалі магми $G(X)$. Множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є непорожньою за умови, що для кожних $a,b \in X$ рівняння $a*x=b$ має розв'язок $x \in X$.*

Твердження 4.4.3. *Якщо X є напівгрупою і $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є непорожньою, то $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ — мінімальний ідеал в $G(X)$.*

Підрозділи 4.5 і 4.6 присвячені опису центрів магми G(X). За означенням, *(алгебраїчним) центром* магми X називається множина

$$C=\{x\in X : \forall\, y\in X\ xy=yx\}.$$

Теорема 4.5.2. *Для квазігрупи X центр магми $G(X)$ збігається з центром X.*

Теорема 4.6.1. *Для квазігрупи X топологічний центр магми $G(X)$ збігається з $G^{\bullet}(X)$.*

Нагадаємо, що під *топологічним центром* право топологічної магми X, наділеної топологією, ми розуміємо множину L(X), яка складається з всіх таких елементів $x \in X$, що ліві зсуви $l_x : X \to X$, $l_x : z \to xz$ є неперервними.

В підрозділі 4.7 охарактеризовано скоротні зліва елементи магми G(X) над квазігрупою X. Елемент a магми X називається *скоротним зліва (відповідно скоротним справа)*, якщо для довільних елементів $x,y \in X$ з рівності ax=ay (відповідно xa=ya) випливає, що x=y.

Теорема 4.7.1. *Нехай X — квазігрупа. Гіперпростір включення $F \in G(X)$ є скоротним зліва в магмі $G(X)$ тоді і тільки тоді, коли F є головним ультрафільтром.*

З цієї теореми випливає, що для довільної квазігрупи X магма G(X) містить тільки тривіальні скоротні зліва елементи. Для скоротних справа елементів ситуація набагато цікавіша.

Твердження 4.8.1. *Нехай X є магмою. Якщо гіперпростір включення $F \in G(X)$ є скоротним справа в G(X), то індексована множина $\{xF : x \in X\}$ є дискретною в G(X), в тому розумінні, що кожен елемент xF має окіл O(xF), що не містить інших елементів yF, де $y \in X \setminus \{x\}$.*

Твердження 4.8.2. *Нехай X є магмою. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ є скоротним справа в G(X), за умови, що існує така сім'я множин $\{S_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp}$, що $x{*}S_x \cap y{*}S_y = \varnothing$ для довільних різних елементів $x,y \in X$.*

З тверджень 4.8.1 і 4.8.2 випливає наступна характеризація скоротних справа ультрафільтрів в G(X), що узагальнює відому характеризацію скоротних справа елементів напівгрупи β(X).

Наслідок 4.8.3. *Нехай X є зліченною магмою. Для ультрафільтра $\mathcal{U}$ на X наступні умови є рівносильними:*

1) $\mathcal{U}$ є скоротним справа в G(X);

2) $\mathcal{U}$ є скоротним справа в β(X);

3) індексована множина $\{x\mathcal{U} : x \in X\}$ є дискретною в β(X);

4) існує така індексована сім'я множин $\{U_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{U}$, що для довільних різних $x,y \in X$ зсуви xU_x і yU_y є неперетинними.

Цю характеризацію можна використати, щоб показати, що для довільної зліченної групи X напівгрупа $\overset{\circ}{\beta}(X)$ вільних ультрафільтрів містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа ультрафільтрів. Виявляється, що схожий результат можна довести для напівгрупи $\overset{\circ}{G}(X)$ вільних гіперпросторів включення. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ на множині X називається *вільним*, якщо для кожної скінченної підмножини $K \subset X$ і кожного елемента $F \in \mathcal{F}$ множина $F \setminus K \in \mathcal{F}$.

Твердження 4.8.4. *Для довільної зліченної квазігрупи X, магма $\overset{\circ}{G}(X)$ містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа вільних гіперпросторів включення.*

В підрозділі 4.9 описано структуру напівгруп $G(C_n)$ над циклічними групами C_n порядку $n < 4$.

П'ятий розділ присвячений вивченню структури напівтруп λ(X) максимальних зчеплених систем на групах X. Мотивацією для вивчення алгебраїчних і комбінаторних властивостей напівгрупи λ(X) є той факт, що для кожної максимальної зчепленої системи $\mathcal{L}$ на X і кожного розбиття $X = A \cup B$ множини X на дві множини A, B, одна з них належить $\mathcal{L}$. Це дає можливість застосовувати максимальні зчеплені системи в комбінаториці чисел і теорії Рамсея.

Ми починаємо розділ, вивчаючи самозачеплені множини в групі. За означенням, підмножина A групи X називається *самозачепленою*, якщо

A $\cap$ xA $\neq \varnothing$ для кожного елемента $x \in X$. У підрозділі 5.1 вивчено самозачеплені множини в групах і обчислено їх мінімальну потужність *sl(X)* для деяких груп X.

В підрозділі 5.2 ми вивчаємо (максимальні) інваріантні зчеплені системи на групах. Максимальна зчеплена система L на групі X є інваріантною тоді і тільки тоді, коли $xL = L$ для всіх $x \in X$.

Теорема 5.2.3. *Для кожної групи X множина $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ максимальних інваріантних зчеплених систем є непорожньою замкненою напівгрупою правих нулів напівгрупи G(X).*

Теорема 5.2.4. *Для довільної нескінченної групи X напівгрупа $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ має потужність $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| = 2^{2^{\tilde{o}}}$.*

Теорема 5.2.8. *Для скінченної групи X наступні умови еквівалентні:*

1) $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| = 1$;
2) $sl(X) > |X|/2$;
3) $|X| < 6$ або X ізоморфна діедральній групі D_6 або $(C_2)^3$.

В підрозділах 5.3 і 5.5 ці результати використовуються для характеризації груп X, суперрозширення яких мають праві нулі або є комутативними.

Твердження 5.3.1. *Максимальна зчеплена система L є правим нулем напівгрупи λ(X) тоді і тільки тоді, коли L є інваріантною*.

На відміну від напівгрупи G(X), яка завжди містить праві нулі, напівгрупа λ(X) містить праві нулі тільки для так званих непарних груп. Кажемо, що група X є *непарною*, якщо кожен елемент $x \in X$ має непарний порядок.

Теорема 5.3.2. *Для групи X наступні умови еквівалентні:*

1) напівгрупа λ(X) має правий нуль;
2) деяка максимальна інваріантна зчеплена система на X є максимальною зчепленою;
3) кожна максимальна інваріантна зчеплена система є максимальною зчепленою;
4) для кожного розбиття $X = A \cup B$ або $AA^{-1} = X$ або $BB^{-1} = X$;
5) кожен елемент групи X має непарний порядок.

З цієї теореми випливає, що λ(X) містить правий нуль тоді і тільки тоді, коли кожен елемент X має непарний порядок. Ситуація з (лівими) нулями є дещо іншою: максимальна зчеплена система $L \in \lambda$(X) є лівим нулем в λ(X) тоді і тільки тоді, коли L є нулем в λ(X) тоді і тільки тоді, коли L є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на X.

Теорема 5.4.2. *Суперрозширення $\lambda(X)$ групи X має (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли X є ізоморфною до C_1, C_3 чи C_5.*

Теорема 5.5.1. *Суперрозширення $\lambda(X)$ групи X є комутативним тоді і тільки тоді, коли $|X| < 5$.*

В підрозділі 5.6 описано скоротні елементи напівгрупи λ(X).

Твердження 5.6.2. *Нехай X — скінченна група. Якщо $\mathcal{C}\in\lambda(X)$ є скоротним зліва або справа, то $\mathcal{C}$ є головним ультрафільтром.*

Теорема 5.6.3. *Нехай X є групою і $\mathcal{L}\in\lambda(X)$ — максимальна зчеплена система на X.*

1) Якщо $\mathcal{L}$ є скоротною справа в $\lambda(X)$, то орбіта $\{x\mathcal{L} : x\in X\}$ є дискретною в $\lambda(X)$ і $x\mathcal{L}\neq y\mathcal{L}$ для всіх $x,y\in X$.

2) $\mathcal{L}$ є скоротною справа в $\lambda(X)$, за умови, що для кожного $x\in X$ існує така множина $S_x\in\mathcal{L}$, що сім'я $\{xS_x : x\in X\}$ є диз'юнктною.

Теорема 5.6.5. *Для кожної зліченної групи X піднапівгрупа $\overset{\circ}{\lambda}(X)$ вільних максимальних зчеплених систем містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа елементів в напівгрупі $\lambda(X)$.*

Це нагадує ситуацію з напівгрупою β(X), що містить всюди щільну відкриту підмножину скоротних справа елементів, а також з напівгрупою G(X), скоротні справа елементи якої утворюють множину, що має відкритий всюди щільний перетин з множиною $\overset{\circ}{G}(X)$ вільних гіперпросторів включення.

В підрозділі 5.7 описано топологічний центр суперрозширення λ(X) групи X. Топологічний центр напівгрупи β(X) збігається з X. З другого боку, топологічний центр напівтрупи G(X) збігається з $G^{\bullet}(X)$. Подібна теорема має місце і для напівгрупи λ(X).

Теорема 5.7.4. Для довільної зліченної групи X топологічний центр напівгрупи λ(X) збігається з $\lambda^{\bullet}(X) = G^{\bullet}(X) \cap \lambda(X)$.

В підрозділі 5.8 ця теорема використовується для опису алгебраїчного центру суперрозширення λ(X).

Теорема 5.8.2. Для кожної зліченної нескінченної групи X алгебраїчний центр напівгрупи λ(X) збігається з алгебраїчним центром групи X.

Цікаво відмітити, що для довільної групи X алгебраїчні центри напівгруп β(X) і G(X) також збігаються з центром групи X. В той же час, для скінченних груп X порядку $2 < |X| < 6$ алгебраїчний центр напівгрупи λ(X) є строго більшим ніж алгебраїчний центр групи X, див. теореми 5.11.1 і 5.11.3.

У підрозділі 5.9 охарактеризовано групи X, суперрозширення λ(X) яких містять одноточкові мінімальні ліві ідеали.

Теорема 5.9.1. *Група X є непарною тоді і тільки тоді, коли всі мінімальні ліві ідеали напівтрупи λ(X) є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал K(λ(X)) напівгрупи λ(X) є замкненою напівгрупою правих нулів, що містить всі інваріантні максимальні зчеплені системи*.

В підрозділі 5.10 описано структуру мінімальних лівих ідеалів напівгрупи λ(Z). Виявляється, що вони ізоморфні до мінімальних лівих ідеалів суперрозширення $\lambda(Z_2)$ компактної топологічної групи Z_2 двоадичних цілих чисел. Нагадаємо, що Z_2 є цілком незв'язною компактною метризовною абелевою групою, яка є границею оберненої послідовності

$$\ldots \to \mathbf{C_{2^n}} \to \ldots \to \mathbf{C_8} \to \mathbf{C_4} \to \mathbf{C_2}$$

циклічних 2-груп C_{2^n} .

За неперервністю функтора **λ** в категорії компактів, суперрозширення $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{Z}_2)$ можна ототожнити з границею оберненої послідовності

$$\ldots \to \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C_{2^n}}) \to \ldots \to \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C_8}) \to \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C_4}) \to \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C_2})$$

скінченних напівгруп $\boldsymbol{\lambda}(C_{2^k})$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{\lambda}(Z_2)$ є метризовною нульвимірною компактною топологічною напівгрупою.

Теорема 5.10.1. *Мінімальні ліві ідеали напівгрупи* $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{Z})$ *топологічно ізоморфні мінімальним лівим ідеалам напівгрупи* $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{Z}_2)$ *і, отже, є компактними метризовними топологічними напівгрупами.*

В підрозділі 5.11 описано структуру суперрозширень λ(G) скінченних груп G малих порядків. Для груп C_n, де $n \in \{1,2\}$, напівгрупа $\boldsymbol{\lambda}(C_n)$ збігається з C_n. Суперрозширення $\boldsymbol{\lambda}(C_3)$ ізоморфне до мультиплікативної напівгрупи $C_3^0 = \{z \in C : z^4 = z\}$ комплексних чисел. Структура суперрозширень груп четвертого і п’ятого порядку описана в наступних теоремах.

Теорема 5.11.1. *Нехай G − група порядку |G|=4.*

1) Напівгрупа $\boldsymbol{\lambda}(G)$ *ізоморфна* $C_2^1 \oplus G$ *і, отже, комутативна.*

2) $\boldsymbol{\lambda}(G)$ *містить два ідемпотенти.*

3) $\boldsymbol{\lambda}(G)$ *має єдиний власний ідеал* $\boldsymbol{\lambda}(G)\setminus G$*, ізоморфний групі* $C_2 \oplus G$.

Теорема 5.11.3.

1) Напівгрупа $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *містить 81 елемент.*

2) Напівгрупа $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *має єдиний нуль Z.*

3) $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *містить 5 ідемпотентів, які комутують.*

4) Центр напівгрупи $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *збігається з* $C_5 \cup \{Z\}$.

5) Усі нетривіальні підгрупи $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *ізоморфні групі* C_5.

6) Напівгрупи $\mathbf{G}(C_5)$ *та* $\boldsymbol{\lambda}(C_5)$ *не є регулярними*.

Нагадаємо, що напівгрупа S *регулярна*, якщо $a \in aSa$ для кожного $a \in S$.

ВИСНОВКИ

Метод ультрафільтрів є одним з найпотужніших інструментів у сучасній комбінаториці чисел. Проте він має свої межі і не може бути застосований до певних проблем комбінаторики чисел. І.В. Протасов висунув припущення, що такі проблеми можуть розв'язуватись за допомогою максимальних зчеплених систем. Це було мотивацією дисертаційної роботи, метою якої є дослідження алгебро-топологічної структури напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем на групах.

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

— продовжено (асоціативну) бінарну операцію, задану на дискретному просторі S, до (асоціативної) правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення G(S) та його підпросторах і вивчено її взаємозв'язок з ґратковою структурою простору G(S);

— описано деякі важливі піднапівгрупи напівтрупи G(S);

— описано мінімальні (ліві) ідеали, топологічні та алгебраїчні центри, скоротні справа (зліва) елементи, праві (ліві) нулі, комутативність напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем;

— отримано дуальну характеризацію гіперпросторів включення зі скінченними носіями;

— вивчено самозачеплені множини в групах і обчислено їх мінімальну потужність для деяких груп;

— доведено топологічну ізоморфність мінімальних (лівих) ідеалів напівгруп $\lambda(Z)$ та $\lambda(Z_2)$, де Z_2 — група цілих 2-адичних чисел;

— повністю описано структуру скінченних напівгруп гіперпросторів включення G(H) та суперрозширення $\lambda(H)$ для груп H малих порядків.

Як виявилося, напівгрупи гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем мають набагато складнішу структуру ніж напівгрупи ультрафільтрів. Це спостерігається вже на скінченному рівні: для скінченної напівгрупи S напівгрупа ультрафільтрів $\beta(S)$ ізоморфна S, в той час як порядок напівгруп $\lambda(S)$ і G(S) має експоненціальний ріст, коли $|S|$ прямує до безмежності, і, як наслідок, їх структура набагато складніша, ніж структура S.

У дисертаційній роботі використовуються методи теорії груп та напівгруп, теорії категорій, функторів і монад, загальні теоретико-множинні, комбінаторні та тополого-алгебраїчні методи. Результати дисртації опубліковані в 5 наукових статтях у журналах, включених до переліку ВАК України та апробовані на численних міжнародних конференціях та школах. Їх достовірність та наукове значення підтверджуються цитуваннями у статтях інших авторів, зокрема, недавньому огляді "Algebra in the space of ultrafilters and Ramsey Theory" Н. Гайдмена та Д. Штраус.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Banakh T. *Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity* / T. Banakh, V. Gavrylkiv, O. Nykyforchyn // Algebra Discrete Math. — 2008. — № 3. — P. 1-29.

2. Banakh T. *Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers* / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. — 2008. — № 4. — P. 1-14.

3. Banakh T. *Algebra in the superextensions of groups, III: minimal left ideals* / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Mat. Stud. — 2009. — Vol. 31, № 2. — P. 142-148.

4. Gavrylkiv V. *The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces* / V. Gavrylkiv // Mat. Stud. — 2007. — Vol. 28, № 1. — P. 92-110.

5. Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces* / V. Gavrylkiv // Mat. Stud. — 2008. — Vol. 29, № 1. — P. 18-34.

6. Banakh T. *Algebra in superextensions of groups* / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Аналіз та топологія: матер. Міжнар. наук. конф. (Львів, 2-7 червня, 2008 р.). — Львів. — 2008. — С. 21-24.

7. Gavrylkiv V. *Algebra in superextensions of groups [Електронний ресурс]* / V. Gavrylkiv // Set Theory, Topology and Banach Spaces: Second International Topology Conference in Poland (Kielce, July 7-11, 2008). — http://www.pu.kielce.pl/topoconf/

8. Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces* / V. Gavrylkiv // матер. VI Міжнар. алгебр. конф. (Кам'янець-Подільський, 1-7 липня 2007 р.). — Київ - Кам'янець-Подільський. — 2007. — С. 82-83.

9. Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on superexstensions* / V. Gavrylkiv // Алгебра, топологія і аналіз: матер. V літн. школи (Козьова, 6-18 серпня 2007 р.). — Львів-Козьова. — 2007. — С. 38-40.

10. Gavrylkiv V. *Zeros and comutativity of semigroups of maximal linked systems* / V. Gavrylkiv // Сучасні проб. мех. та матем.: матер. Міжнар. наук. конф., присв. 80-річчю від дня народ. академіка НАН України Я.С. Підстригача (Львів, 25-29 травня 2008 р.). — Львів. — 2008. — С. 210-211.

11. Gavrylkiv V. *Minimal left ideals of the superextensions of groups* / V. Gavrylkiv // Нескінченновимірний аналіз та топологія: матер. Міжнар. наук. конф. (Яремче, 27 травня - 1 червня 2009 р.). — Івано-Франківськ. — 2009. — С. 46-48.

АНОТАЦІЯ

Гаврилків В.М. *Алгебро-топологічні структури на суперрозширеннях. — Рукопис.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 — алгебра і теорія чисел. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2009.

Дисертація присвячена вивченню алгебраїчної структури магм і напівгруп $G(X)$ та $\lambda(X)$ гіперпросторів включення і максимальних зчеплених систем на магмах, напівгрупах і групах X. Описано мінімальні (ліві) ідеали, топологічні та алгебраїчні центри, скоротні справа (зліва) елементи, праві (ліві) нулі, комутативність напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем. Доведено топологічну ізоморфність мінімальних лівих ідеалів напівгруп $\lambda(Z)$ та $\lambda(Z_2)$, де Z_2 — група цілих 2-адичних чисел. Повністю описано структуру скінченних напівгруп гіперпросторів включення $G(H)$ та суперрозширення $\lambda(H)$ для груп H малих порядків.

Ключові слова: максимальна зчеплена система, суперрозширення, гіперпростір включення.

АННОТАЦИЯ

Гаврилкив В.М. *Алгебро-топологические структуры на суперрасширениях. — Рукопись.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. — Львовский национальный университет имени Івана Франко, Львов, 2009.

Диссертация посвящена изучению алгебраической структуры магм и полугрупп $G(X)$ и $\lambda(X)$ гиперпространств включения и максимальных сцепленных систем на магмах, полугруппах и группах X. Описано минимальные (левые) идеалы, топологические и алгебраические центры, сократимые справа (слева) элементы, правые (левые) нули, комутативность полугрупп гиперпространств включения и максимальных сцепленных систем. Доказана топологическая изоморфность минимальных левых идеалов полугрупп $\lambda(Z)$ и $\lambda(Z_2)$, где Z_2 — группа целых 2-адических чисел. Полностью описана структура конечных полугрупп гиперпространств включения $G(H)$ и суперрасширения $\lambda(H)$ для групп H малых порядков.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, суперрасширения, гиперпространство включения.

ABSTRACT

Gavrylkiv V.M. *Algebraic and topological structures on the superextensions. —Manuscript.*

A thesis for obtaining the Degree of Kandidat of Sciences in Physics and Mathematics by the speciality 01.01.06 — Algebra and Number Theory. — Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2009.

The thesis is devoted to a thorough study of the algebraic and topological structure of the compact right-topological semigroups G(X) and λ(X) of inclusion hyperspaces and maximal linked systems on a semigroup X. The results of the thesis can be divided into three major parts. The first one consists of the results of the **third chapter** and concerns the topological structure of the space G(X) of inclusion hyperspaces on a discrete space X. A family $\mathcal{F}$ of non-empty subsets of X is called an *inclusion hyperspace* if it is monotone in the sense that for each set $F\in\mathcal{F}$ the family $\mathcal{F}$ includes all subsets $E \subset X$ that contain F. We show that G(X) is a closed subspace of the double power-set P(P(X)) endowed with the natural product topology, turning G(X) into a Hausdorff supercompact space. Since each (ultra)filter on X is an inclusion hyperspace on X, the space G(X) contains the spaces Fil(X) and β(X) of filters and ultrafilters as closed subspaces. The other important subspaces of G(X) are: the space $N_2(X)$ of linked inclusion hyperspaces and the space λ(X) of maximal linked systems on X, called the *superextension* of X. The space G(X) is a complete lattice with respect to the operations of union and intersection of inclusion hyperspaces and coincides with the smallest complete sublattice of P(P(X)) generated by the Stone-Cech extension β(X) of X. Besides the operations of union and intersection the space G(X) possesses an important unary operation of *transversal* $\perp\mathcal{F} = \{ E \subset X : \forall F\in\mathcal{F} : F \cap E \neq \varnothing\}$. The principal result of the third chapter is the dual characterization of inclusion hyperspaces with finite support: an inclusion hyperspace $\mathcal{F}$ is generated by a finite family of finite subsets if and only if both $\mathcal{F}$ and $\perp\mathcal{F}$ are generated by families of finite sets. This characterization is essentially used for describing the topological center of the semigroup G(X).

The **fourth chapter** is devoted to studying the algebraic structure of the semigroup G(X). First we extend the semigroup operation from X to G(X) defining the product $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ of two inclusion hyperspaces as the inclusion hyperspace generated by unions $\bigcup_{a\in A} aB_a$ where $A\in\mathcal{A}$ and $\{B_a\}_{a\in A} \subset\mathcal{B}$. Endowed with the so-extended semigroup operation, the space G(X) becomes a supercompact right-topological semigroup containing β(X), λ(X), $N_2(X)$, and Fil(X) as closed subsemigroups.

The semigroup G(X) contains many right zeros: those are inclusion hyperspaces $\mathcal{F}\in$ G(X) that are invariant in the sense that for every $F\in\mathcal{F}$ and $x\in X$ the shifts xF and $x^{-1}F = \{ y \in X : xy \in F \}$ belong to $\mathcal{F}$. On the other hand, for each non-trivial group X the semigroup G(X) contains no left zeros. For each group X the

algebraic center of the semigroup G(X) coincides with the algebraic center of the group X while the topological center of G(X) coincides with the set $G^{\bullet}(X)$ of inclusion hyperspaces with finite support. The left cancelable elements of G(X) coincide with the principal ultrafilters. On the other hand, if X is countable, then G(X) contains many non-trivial right cancelable elements: the set of such elements contains an open dense subset of the family $G^{\circ}(X)$ of free inclusion hyperspaces on X.

In the **fifth chapter** we study the algebraic structure of the semigroup $\lambda(X) = \{\mathcal{F} \in G(X) : \perp\mathcal{F} = \mathcal{F}\}$ of maximal linked systems on a group X. We start with characterizing groups X whose superextensions λ(X) have right zeros: those are so-called *odd* groups, i.e., groups whose elements have odd orders. On the other hand, the superextension λ(X) has a left zero if and only if X is odd of order $|X| < 6$. The semigroup λ(X) is commutative if and only if $|X| < 5$. For an infinite countable group X the algebraic center of λ(X) coincides with the algebraic center of X while the topological center of λ(X) coincides with the set $\lambda^{\bullet}(X)$ of all maximal linked systems with finite support. Similarly to the semigroups β(X) and G(X), the superextension λ(X) contains many right cancelable elements. For each odd group X the minimal ideal K(λ(X)) of λ(X) coincides with the set of all invariant maximal linked systems and hence is a closed topological semigroup of right zeros. Each minimal left ideal of the superextension λ(Z) of the group Z of integers is a metrizable topological semigroup, topologically isomorphic to a minimal left ideal of the superextension $\lambda(Z_2)$ of the (compact metrizable) group Z_2 of integer 2-adic numbers. At the end of this chapter we describe the structure of the superextensions λ(X) of finite groups X of cardinality $|X| < 6$.

Key words : superextensions, right-topological semigroup, inclusion hyperspace, maximal linked system.

Підписано до друку 27.07.2009 р. Формат 60х90/16.
Ум. друк. арк. 0,9. Папір ксероксний.
Віддруковано цифровим друком.
Тираж 100 прим. Зам №21

Друк пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128,
тел. 58-04-32