На правах рукописи

ПЛЮТА Алексей Иванович

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

05.13.18. - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ставрополь - 2004

Работа выполнена в Ставропольском государственном университете

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор Стеценко Владислав Яковлевич

Официальные оппоненты: Доктор технических наук, профессор Червяков Николай Иванович
Кандидат технических наук Толпаев Владимир Александрович

Ведущая организация: Вологодский государственный университет

Защита состоится «12» марта 2004г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.256.05 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Ставропольском государственном университете по адресу: 355009, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1 физико-математический факультет, ауд. 214

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СГУ по адресу: 355000, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1.

Автореферат разослан «10» февраля 2004г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук *КБ.* Копыткова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При решении широкого класса задач математического анализа, алгебры, экономики требуется находить решение операторных уравнений. В тех случаях, когда процесс отыскания точного решения является затруднительным, мы используем итерационные методы, позволяющие найти приближенное решение с определенной степенью точности. Соответствующий класс задач можно представить с помощью операторного уравнения вида

$$x = Ax + f \qquad (1)$$

с линейным или нелинейным оператором *A,* действующим в банаховом пространстве *E,* и свободным членом f из этого пространства.-

Следует отметить, что такие уравнения, также описывают некоторые экономические модели, например, модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Балансовая модель производства является одной из наиболее простых математических моделей. Она записывается в виде системы уравнений, каждое га которых выражает требование равенства (баланса) между количеством продукции, производимой отдельным экономическим объектом, и совокупной потребности в этом продукте. Отсюда происходит название модели.

Впервые балансовые модели начали использоваться в СССР в 20-х годах. В более или менее законченном виде теория балансовых моделей была разработана американским ученым В.В. Леонтьевым в середине 30-х годов. Однако в те годы ни уровень развития математической науки, ни качество вычислительной техники не позволили широко распространить балансовый метод.

За разработку и внедрение в практику метода межотраслевого баланса группа советских экономистов под руководством академика А.Н. Ефимова в 1968 году была удостоена Государственной премии СССР. В настоящее время большое число работ посвящается этой модели и ее применению для решения различных задач. Такой интерес к балансовой модели определяется тем, что, как оказалось, эта модель хорошо отображает многие существенные особенности современного производства и в то же время легко поддается расчету. Во многих странах мира балансовый метод используется для экономического анализа, планирования и прогнозирования.

В связи с появлением ЭВМ большой мощности значительно повысился интерес к различным численным методам и алгоритмам, реализация которых граничит с проведением вычислительного эксперимента. Потребность в таком подходе к решению задач математической экономики диктуется все усложняющимися запросами практики, а также связана с попыткой создания более рациональных общих теоретических моделей для изучения сложных экономических явлений.

Активное использование методов численного моделирования позволяет резко сократить сроки научных и конструкторских разработок.

Поэтому, в качестве довольно распространенных задач такого типа, например, встречается задача о существовании у таких уравнений решения $x = x^*$, обладающего свойством. неотрицательности. Процесс отыскания как точного, так и приближенного решения уравнений (1) является весьма затруднительным при достаточно большом количестве неизвестных. Такого рода задачи специфичны в задачах экономики, для которых экономический смысл имеет, как правило, лишь неотрицательные решения. Также важно уметь строить приближения u_n и, соответственно, v_n к решению x^* операторного уравнения вида (1), такие что

$$u_n \le x^* \le v_n .$$

При этом, оказывается, параллельно решаются две важные задачи теории приближенных методов решения операторных уравнений - задача об оценке погрешности приближенного решения, а также задача об априорной оценке относительной погрешности приближенного решения.

Цель диссертационной работы - приближенное решение операторных уравнений вида *(1)* в случаях, когда спектральный радиус $r(A)$ оператора A не обязательно меньше единицы; построение итерационных последовательностей сходящихся к решению уравнения *(1),* к собственным значениям и собственным векторам оператора A ; разработка новых методов, позволяющих повышать скорость сходимости итераций к решению уравнения *(1);* разработка соответствующего программного обеспечения, позволяющего реализовать предложенные методы.

Научная задача исследований состоит в разработке новых методов решения операторных уравнений, описывающих экономические модели (модель межотраслевого баланса).

При решении поставленной общей научной задачи получены результаты по ряду частных задач:

1. Проведение анализа известных численных методов построения приближений, сходящихся к спектральному радиусу оператора и к собственным векторам.
2. Разработка и анализ алгоритмов, позволяющих строить приближения, сходящиеся к точному решению операторных уравнений, в тех случаях, когда спектральный радиус оператора не обязательно меньше единицы.
3. Разработка алгоритмов решения операторных уравнений, обладающих высокой скоростью сходимости построенных приближений к точному решению.

4. Разработка соответствующего программного обеспечения, позволяющего реализовать разработанные алгоритмы решения операторных уравнений.

Методы исследований. Для решения поставленных в работе научных задач использованы идеи и методы классического функционального анализа и теории положительных, а также монотонных операторов, действующих в полуупорядоченных банаховых пространствах.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов вытекает из математической строгости постановки и решения исследуемых задач, а также из совпадения ряда полученных результатов в частных случаях с известными в литературе.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Итерационный метод решения системы линейных алгебраических уравнений вида (1) с квадратной матрицей A, в случае, когда наибольшее по модулю собственное значение матрицы A, больше чем единица.

2. Методы получения двусторонних оценок точного решения x^* операторного уравнения вида (1), в случае, когда спектральный радиус оператора A не обязательно меньше единицы, а также подходы к уточнению полученных оценок.

3. Синтез методов ускорения сходимости монотонных приближений к решению x^* уравнения вида (1) и однопараметрического итеративного агрегирования.

4.Метод ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида (1), в случае выбора в качестве начальных приближений вектор||, которые ограничивают точное решение x^* уравнения вида (1) «сверху» и «снизу».

5. Вариант метода Зейделя, позволяющий строить приближения, сходящиеся к точному решению x^* уравнения (1) с помощью метода ускорения сходимости.

Научная новизна диссертационной работы. Результаты работы представляют собой развитие теории линейных и нелинейных операторов, действующих в полуупорядоченных банаховых пространствах. Так, например, предложены методы решения операторных уравнений вида *(1)* в случаях, когда у оператора A спектральный радиус $\Gamma(A)$ не обязательно меньше единицы. Предложен метод построения двусторонних оценок точного решения x^* операторного уравнения вида (1) в случае, когда спектральный радиус не обязательно меньше единицы. Предложены варианты методов, позволяющие строить приближения к решению уравнений вида (1), обладающие достаточно высокой скоростью сходимости. Разработано программное обеспечение на языке программирования TURBO PASCAL, позволяющее реализовывать предложенные итерационные методы.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая ценность работы заключается в получении новых оценок точного решения уравнения (1), разработке новых методов решения уравнения (1)

Практическая ценность работы заключается в возможности применения полученных методов решения уравнения (1) при решении конкретных задач математики и экономики. Отдельные результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов и подготовке учебных пособий.

Реализация результатов. Теоретические и практические результаты работы использованы в учебном процессе СГУ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международной летней школе молодых ученых «Итерационные методы и матричные вычисления» (г. Ростов-на-Дону, 2002), на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2002), на региональной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы современной физики» (г. Ставрополь, 2002), на зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г.Воронеж, 2003), на региональной школе-семинаре «Современные проблемы математического моделирования» (п.Абрау-Дюрсо, 2003 г.) и неоднократно на семинарах кафедры математического анализа Ставропольского государственного университета (руководитель - профессор В.Я. Стеценко).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 печатных работ [1-7]. Часть результатов диссертации получена автором совместно с научным руководителем профессором В.Я. Стеценко, при этом В.Я. Стеценко в соответствующих результатах принадлежат постановка задач и общие рекомендации относительно метода их решения, а автору диссертации реализация этих рекомендаций и доказательства соответствующих утверждений.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и программного обеспечения, оформленного в приложении. В ней принята сквозная нумерация параграфов, для утверждений и формул введена двойная нумерация, включающая номер параграфа и порядковый номер утверждения или формулы в нем. Диссертация изложена на 167 страницах, список использованной литературы содержит 82 наименования.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. ВЛ. Стеценко за постановку задач и общие рекомендации к их выполнению, обсуждение полученных результатов, оказанную помощь и поддержку при работе над диссертацией.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Проиллюстрируем обзор содержания работы с кратким обзором некоторых известных результатов, непосредственно связанных с рассматриваемым кругом вопросов. Прежде чем перейти к обзору содержания работы, приведем некоторые определения.

Будем рассматривать банахово пространство E, полуупорядоченное конусом K, и оператор A произвольной природы, действующий в E.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется конусом, если вместе с каждой своей точкой X оно содержит луч (лучом, проходящим через точку $x \in E$ $x \neq \theta$, называется совокупность точек tx $(t \geq 0)$), проходящий через JC , и если из $x, -x \in K$ вытекает, что $x = \theta$.

Конус K называется телесным, если он содержит внутренние элементы. Если любой элемент x пространства E может быть представлен в виде $x = u - v$ $(u, v \in K)$, то конус K называется воспроизводящим. Конус K называется нормальным, если из неравенства $\theta \leq x \leq y$ следует, что $\|x\| \leq M\|y\|$, где M - *const* - константа нормальности, не зависящая ни от x, ни от y .

Линейный оператор называется вполне непрерывным, если он переводит каждое ограниченное по норме пространства E множество в компактное множество.

Почти во всякой физической задаче, которая может быть сформулирована с помощью линейных операторов, важной характеристикой типа задачи является спектр соответствующего оператора. Одной из основных характеристик спектра оператора является спектральный радиус этого оператора. Напомним, что те значения $Я$, при которых уравнение

$$Ax - \lambda x = f \text{ ,}$$

где A — рассматриваемый оператор, имеет единственное решение, а оператор $(A - I)^{-1}$ ограничен, называются регулярными. Совокупность всех значений λ, не являющихся регулярными, называется спектром оператора A и обозначается $\sigma(A)$. Спектральным радиусом $r(A)$ оператора называется число, определенное формулой

$$r(A) = \sup|\lambda|, \ (\lambda \in \sigma(A)).$$

Во введении обоснована актуальность диссертационных исследований, сформулирована цель работы, показана научная новизна основных результатов, практическая значимость, указаны основные положения, выносимые на защиту.

Глава I посвящена обзору известных итерационных методов решения операторного уравнения вида (1). По изложенным в *f*лаве I методам автором составлены программы на языке программирования TURBO PASCAL. При,помощи этих программ реализовывались рассмотренные методы на конкретных примерах.

В § 1 главы I исследуется метод последовательных приближений.

Система уравнений

$$Ax = b$$

тем или иным методом преобразуется к виду системы уравнения "второго рода", т.е. к виду (1), после чего её решение находится как предел последовательности x_{m+1}:

$$x_{m+1} = Ax_m + f, \quad (m = 0,1,2,...) \qquad \textbf{(2)}$$

где A - матрица порядка $(n \times n)$, f - свободный вектор $f \in R^n$, x - неизвестный вектор, $x \in R^n$, x_0 - начальное приближение. Этот метод (2) называется методом простой итерации.

При решении уравнения вида (1) методом последовательных приближений (2) по заданной точности $\varepsilon > 0$ вычислений бывает важно определить число итераций "m".

При известных условиях к решению уравнения (1) сходится итерационный процесс (2), при любом начальном приближении x_0, при этом таковыми известными условиями является одно из следующих условий:

а) $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le q_1 < 1,$

б) $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ji}| \le q_2 < 1,$

в) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \le q_3 < 1.$

Пусть $\varepsilon > 0$ заданное число, тогда для того чтобы гарантировать неравенство:

$$\|x^* - x_{m+1}\|_{(i)} \le \frac{q_i^m}{1 - q_i} \cdot \|x_1 - x_0\|_{(i)} < \varepsilon, \; (i = 1,2,3)$$

где $\|x\|_{(i)}$ соответственно одна из норм,

положим

$$z = \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1 - q_i)}{\|x_1 - x_0\|_{(i)}}}{\ln(q_i)},$$

тогда достаточно определить m по формуле:

$$m = [z] + 1,$$

где $[z]$ обозначается значение функции "антье от z", т.е. обозначает целую часть числа z. Напомним, что $[z]$ - наибольшее целое число, не превосходящее числа z.

На страницах §1 рассмотрены соответствующие примеры, когда по заданной точности ε определяется количество приближений к вектору являющимся решением данной системы уравнений, с заданной точностью ε.

В §2 рассматривается метод ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида (1). Предполагается, что спектральный радиус $r(A) < 1$; поэтому уравнение (1) имеет единственное решение x^*, которое является пределом последовательных приближений

$$x_{n+1} = Ax_n + f, (n = 0,1,2,...)$$

при любом начальном приближении $x_0 \in E$. Допустим, что начальное приближение $x_0 = u_0$ выбрано так, что

$$u_0 \le Au_0 + f. \tag{3}$$

Тогда последовательные приближения

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

будут удовлетворять соотношениям

$$u_0 \le u_1 \le ... \le u_n \le u_{n+1} \le ... \le x^*.$$

Аналогично, если начальное приближение $x_0 = v_0$ удовлетворяет соотношению

$$v_0 \ge Av_0 + f, \tag{4}$$

то последовательные приближения

$$v_{n+1} = Av_n + f$$

удовлетворяют соотношениям

$$x^* \le ... \le v_{n+1} \le v_n \le ... \le v_1 \le v_0.$$

Таким образом, если удается найти элементы u_0 и v_0, удовлетворяющие соответственно соотношениям (3) и (4), то мы получаем монотонные приближения к точному решению x^* операторного уравнения (1).

В §2 предлагается определение поправочных коэффициентов p_1 и q_1, таких что выполнены следующие неравенства:

$$u_1 - u_0 \ge p_1(v_0 - v_1),$$
$$v_0 - v_1 \ge q_1(u_1 - u_0).$$

Тогда определим элементы

$$u_1^* = \frac{u_1 + p_1 v_1}{1 + p_1},$$

$$v_1^* = \frac{v_1 + q_1 u_1}{1 + q_1}. \qquad (6)$$

Аналогично по u_n, v_n строятся приближения u_n^*, v_n^*, которые можно рассматривать как способ уточнения приближений u_n^*, v_n^* к точному решению x^*. Формулы (5) и (6) рассмотрены как рекуррентный процесс построения последовательностей u_n^*, v_n^*.

Рассмотренный выше метод ускорения сходимости проиллюстрирован соответствующими примерами.

В §3 главы I рассматривается метод однопараметрического итеративного агрегирования применительно к линейным операторным уравнениям. Данный метод проиллюстрирован соответствующими примерами, реализованными на программах на языке программирования TURBO PASCAL. Вычислительная практика свидетельствует о высокой сходимости метода однопараметрического итеративного агрегирования и при нарушении известных условий.

В §4 главы I рассматривается одно обобщение метода однопараметрического итеративного агрегирования в случае применения к нелинейным уравнениям. Данный метод также проиллюстрирован соответствующими примерами, реализованными на программах, на языке программирования TURBO PASCAL. Многочисленные примеры выявили некоторые «интересные» особенности рассматриваемого метода.

Глава II посвящена исследованию итерационных методов построения приближений, сходящихся к спектральному радиусу и собственному вектору линейного оператора.

Так в §5 главы II рассмотрены различные способы построения приближений, сходящихся к спектральному радиусу $r(A)$.

Алгоритм получения оценок как сверху так и снизу для значений спектрального радиуса $r(A)$ оператора A базируется на следующей теореме:

Теорема 5.2 *Пусть* $u_0 \in R^n$ *- вектор у которого все компоненты* $(u_0)_i$ *(i=1,2,..) являются положительными числами:* $(u_0)_i > 0$. *Пусть* $\alpha \ge 0$ *и* $\beta \ge 0$ *таковы, что*

$$\alpha u_0 \le A u_0 \le \beta u_0$$

(здесь и далее запись $x \ge y$, $x, y \in R^n$ *означает, что для всех* $i = \overline{1,n}$ *выполняются неравенства* $(x)_i \ge (y)_i$*). Тогда* $\alpha \le r(A) \le \beta$.

При этом если α_n, β_n соответственно таковы, что

$$\alpha_n = \max\{\alpha : \alpha u_0 \le A^n u_0\},$$
$$\beta_n = \min\{\beta : A^n u_0 \le \beta u_0\},$$

то

$$\alpha_n^{1/n} \le r(A) \le \beta_n^{1/n}$$

и при этом последовательности $\{\alpha_n^{1/n}\}$ и $\{\beta_n^{1/n}\}$ сходятся, соответственно монотонно возрастая и монотонно убывая, к $r(A)$.

По предложенному алгоритму в теореме 5.2 автором была разработана соответствующая компьютерная программа на языке программирования TURBO PASCAL. Данная программа была апробирована на большом количестве примеров, которые представлены в §5.

Этот алгоритм в аналогичной форме приемлем для получения оценок снизу, соответственно сверху для спектрального радиуса линейного оператора вида

$$Ax(t) = \int_\Omega k(t,s)x(s)ds$$

с неотрицательным непрерывным ядром $K(t,s)$.

Также в §5 указаны признаки, обеспечивающие выполнение условия $r(A) < 1$.

Получены соответствующие признаки для случая; когда A - интегральный оператор вида $Ax(t) = \int_\Omega K(t,s)x(s)ds$, в котором Ω - ограниченное замкнутое множество из евклидова пространства R^m, $K(t,s)$ - функция, для которой при некоторых $p > 1$ и $q = \frac{p}{p-1}$ выполняется условие:

$$\int_\Omega \left[\int_\Omega |K(t,s)|^q \, ds \right]^{\frac{1}{q}} dt < +\infty. \qquad (7)$$

При выполнении условия (7) оператор A, как известно, действует в пространстве $L_p(\Omega)$ и является вполне непрерывным оператором в этом пространстве.

Предварительно напомним определение неразложимости оператора. Положительный линейный оператор A назовем неразложимым, если из того, что $x > \theta, x \ge \alpha Ax$ $(\alpha > 0)$, следует, что $x >> \theta$.

Введем в рассмотрение следующие функции

$$P(t)=\int_{\Omega}|K(t,s)|\,ds,\ Q(t)=\int_{\Omega}|K(s,t)|\,ds.$$

Теорема 5.3. *Пусть для некоторого* $\alpha\in[0,1]$ *выполняется следующее неравенство*

$$P^{\alpha}(t)Q^{1-\alpha}(t)\le 1,\ (t\in\Omega) \qquad (8)$$

и, кроме того, выполняется одно из двух следующих условий:

1°) в неравенстве (8) равенство допускается лишь на множестве точек лебеговой меры нуль;

2°) в неравенстве (8) *строгое неравенство выполняется для всех* t *из некоторого множества* $\omega\in\Omega$, $mes\,\omega>0$, *оператор* A *- неразложим в пространстве* $L_p(\Omega)$.

Тогда спектральный радиус г(А) интегрального оператора А в пространстве $L_p(\Omega)$ *меньше чем единица:*

$$r(A)<1.$$

В §6 главы II рассмотрены различные способы построения приближений сходящихся к собственному вектору оператора *A,* отвечающего собственному значению $r(A)$.

Оператор *A* будем предполагать при этом не только положительным, но и фокусирующим. Напомним определение фокусирующегося оператора.

Определение 6.1. *Оператор А называется фокусирующим на конусе К, если он щ -положительный и если для всех* $x>\theta, y>\theta$ *существует постоянная* κ^2, *такая что*

$$\theta(Ax,Ay)\le\kappa^2.$$

При этом число к назовем постоянной фокусирования.

Приведем критерий фокусирования.

Утверяедение 6.1. *Для того чтобы положительный оператор А был фокусирующим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* $u_0\in K$, $\rho-const$, *что для каждого* $x\in K$ *выполняется неравенство*

$$\lambda(x)u_0\le Ax\le\rho\lambda(x)u_0.$$

Здесь u_0 *- фиксированный элемент конуса К. Это утверждение означает, что* $AK\subset K_{u_0,\rho}$.

Тогда алгоритм построения приближений,- сходящихся к собственному вектору оператора *A* определяется следующей теоремой:

Теорема 6.3. *Пусть* A *- фокусирующий оператор с постоянной к. Тогда* A *имеет в* K_{u_0} *собственный вектор* x^*, *которому отвечает собственное значение* λ_1. *К этому вектору* x^* *сходится метод*

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\| Ax_n \|_{u_0}} \quad (n = 0,1,2,...)$$

при любом $x_0 \in K_{u_0}, x_0 \neq \theta$. *При этом справедлива оценка близости*

$$\delta(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q}\delta(x_1, x_0),$$

где q *удовлетворяет неравенству*

$$q \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} < 1.$$

К собственному вектору x^* *также сходятся последовательности* u_n *и* v_n, *которые удовлетворяют следующему неравенству*

$$u_n \leq x^* \leq v_n$$

где

$$u_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}\cdot\left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^n} \hat{A}^n x_0,$$

$$v_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}\cdot\left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^n} \hat{A}^n x_0,$$

а постоянные а и Ъ таковы, что

$$ax_0 \leq Ax_0 \leq bx_0.$$

Рассмотренные в §6 методы накладывают на оператор; A дополнительные условия и ограничения.

Также рассмотрены и построены приближения, ведущие к собственному вектору x^* для некоторых классов нелинейных операторов $F(x)$. Здесь выделен соответствующий класс нелинейных операторов $F(x)$, действующих в полуупорядоченном банаховом пространстве, являющимся монотонным относительно нормального конуса K и таким, что

$$F(\alpha x) \leq \alpha^{\mu} F(x)$$

для всех $x \in K$ и $\alpha \in [1;+\infty]$, где $\mu < 1, \mu - const$.

В главе III рассмотрены новые конструкции и алгоритмы построения приближений, сходящихся к точному решению x^* операторного уравнения вида (1).

Так в §7 главы III рассмотрен метод перехода от уравнения вида (1) с матрицей A, к уравнению

$$y = By + g \tag{9}$$

с матрицей B, спектральный радиус которой меньше, чем спектральный радиус матрицы A $\left(r(B) < r(A)\right)$.

Этот прием основан на предварительном преобразовании уравнения (1) к новому уравнению вида (9), для которого будет выполнено неравенство:

$$r(B) < 1$$

и, следовательно, для решения которого может быть использован метод последовательных приближений:

$$x_{m+1} = Bx_m + f, \quad (m = 0,1,...)$$

при любом начальном приближении x_0.

Соответствующий метод основан на результатах работ В.Я Стеценко, Т.А. Костенко, В.А. Семилетова и заключается в следующем.

Пусть у оператора A среди собственных значений только одно больше единицы, тогда:

1°) нормируем собственные векторы x^* и l^* матрицы A и A^*, соответственно условием

$$l^*(x^*) = 1;$$

2°) по матрице «Л строим матрицу B согласно формуле

$$Bx \overset{def}{=} Ax - \lambda_1 l^*(x)x^*,$$

где $\lambda_1 = r(A)$. При этом явный вид матрицы B может быть найден по виду матрицы A и виду векторов x^* и l^*. Спектр матрицы B расположен внутри круга с центром в начале координат и радиусом равным единице, что позволяет применять для решения уравнения с матрицей B метод последовательных приближений.

На самом деле этот метод обладает существенно большими потенциальными возможностями, в силу которых предлагается прием решения уравнений вида (1) с матрицами A, необязательно являющихся неотрицательными матрицами. Этот метод был реализован на языке программирования TURBO PASCAL для матриц A, спектральный радиус которых больше единицы.

В §8 главы III рассмотрен метод получения оценок вида:

$$u \le x^* \le v,$$

где x^* - неизвестное решение линейного операторного уравнения вида (1).

Соответствующие оценки базируются на следующих теоремах:

Теорема 8.1. *Пусть* x_{n-p}, x_n, x_{n+p} («$=0,1,2,...$) *соответствующие приближения к решению* x^* *метода последовательных приближений*

$$x_{m+1} = Ax_m + f. \quad (m = 0,1,2,...)$$

Подчеркнем, что при этом сходимость этих последовательных приближений к x^* *заранее не предполагается.*

Пусть постоянная γ *такова, что* $\gamma \in [0;1)$ *и при этом выполнено неравенство*

$$x_{n+p} - x_n \leq \gamma(x_n - x_{n-p})$$

Тогда для решения x^* *уравнения (1) (если это решение существует) справедлива следующая оценка*

$$x^* \leq x_{n+p} + \frac{\gamma}{1-\gamma}(x_{n+p} - x_n),$$

которую естественно назвать априорной оценкой "сверху" неизвестного решения x^*.

Теорема 8.2. *Пусть* x_{n-p}, x_n, x_{n+p} $(n = 0,1,2,...)$ *соответствующие приближения к решению* x^* *методапоследовательныхприближений. Пусть постоянная* **р** *такова, что* $\beta < 1$ *иприэтомвыполняетсянеравенство*

$$\beta(x_n - x_{n-p}) \leq x_{n+p} - x_n,$$

то справедлива следующая априорная оценка "снизу" для неизвестного решения x^**:*

$$x^* \geq x_{n+p} + \frac{\beta}{1-\beta}(x_{n+p} - x_n).$$

Отметим тот факт, что предложенный метод получения оценок точного решения x^* операторного уравнения вида (1) эффективен и в том случае, когда $r(A) > 1$.

В §9 главы **III** рассмотрены подходы к уточнению границ решения операторных уравнений вида (1) в случае, когда спектральный радиус r*(A)* не обязательно меньше единицы. Соответствующие уточнения базируются на следующих теоремах.

Теорема 9.1. ***Пусть оператор*** A^p ***является*** u_0 ***- ограниченным снизу. Пусть выполнено неравенство***

$$x_{n+p} - x_n \leq \gamma(x_n - x_{n-p}) \qquad (10)$$

и $\gamma > \delta_0$.

Тогда имеет место следующее уточнение оценки "сверху" для решения x^* уравнения (1):

$$x^* \le x_{n+p} + \frac{\gamma}{1-\gamma}(x_{n+p} - x_n) - \frac{\delta}{(1-\gamma)(1-\delta_0)} u_0,$$

где γ и δ_0 определяются согласно **(8)** *и*

$$A^p u_0 \ge \delta_0 u_0 \quad (\delta_0 > 0), \tag{И}$$

а

$$\delta = \delta\left[\gamma(x_n - x_{n-p}) - (x_{n+p} - x_n)\right] > 0.$$

Теорема 9.2. *Пусть оператор A^p является u_0 - ограниченным снизу. Пусть для последовательных приближений x_{n+p}, x_n, x_{n-p}, где пир фиксированные натуральные числа ($n > p$), выполняется неравенство*

$$\beta(x_n - x_{n-p}) \le x_{n+p} - x_n$$

причем $0 < \beta < 1$ и $\beta > \delta_0$.

Тогда имеет место следующее уточнение оценки "снизу" для решения x^* уравнения (1):

$$x^* \ge x_{n+p} + \frac{\beta}{1-\beta}(x_{n+p} - x_n) + \frac{\delta_1}{(1-\beta)(1-\delta_0)} u_0,$$

где β и δ_0 определяются в соответствии с неравенствами

$$\beta(x_n - x_{n-p}) \le x_{n+p} - x_n$$

и (11), а

$$\delta_1 = \delta_1\left[(x_{n+p} - x_n) - \beta(x_n - x_{n-p})\right] > 0.$$

В §10 главы III предлагается один вариант метода, позволяющего строить приближения к решению системы линейных уравнений вида (1), обладающего достаточно высокой скоростью сходимости. Предлагаемый вариант по существу представляет собой сочетание методов итеративного агрегирования (см. §3) и использует идею ускорения сходимости для известного варианта ускорения сходимости метода последовательных приближений (см. §2). Предлагаемый в данном параграфе метод по существу гарантирует достаточно высокую степень сходимости к исходному решению и отличается простотой в его реализации. Немаловажной особенностью этого метода является то, что этот метод способен сходится к решению уравнения вида (1) и в случае, когда спектральный радиус матрицы A больше единицы $r(A) > 1$, чего не могут себе позволить хорошо известные итерационные методы решения операторных уравнений, например метод наискорейшего спуска. Преимущества предлагаемого метода также проиллюстрированы соответствующими примерами и графиками.

В §11 главы III приближения "снизу" и "сверху" к точному решению x^* операторного уравнения вида (1), строятся по методу ускорения сходимости монотонных приближений (см.§2) к точному решению x^* уравнения вида (1) по следующим формулам:

$$u_n^* = \frac{u_n + p_n v_n}{1+p_n}, \qquad v_n^* = \frac{v_n + q_n u_n}{1+q_n}.$$

Здесь в качестве начальных приближений u_0, v_0 предлагается выбрать векторы, полученные по следующим формулам:

$$x_{n+p} + \frac{\beta}{1-\beta}(x_{n+p} - x_n),$$

$$x_{n+p} + \frac{\gamma}{1-\gamma}(x_{n+p} - x_n),$$

где x_{n-p}, x_n, x_{n+p} $(n = 0,1,2,...)$ соответствующие приближения к решению x^* метода последовательных приближений:

$$x_{n+1} = Ax_n + f, (n = 0,1,2,...)$$

постоянная β такова, **что $\beta < 1$ и при этом выполня**ется неравенство:

$$\beta(x_n - x_{n-p}) \leq x_{n+p} - x_n$$

постоянная γ такова, что y е $[0,1)$ и при этом выполнено неравенство:

$$x_{n+p} - x_n \leq \gamma(x_n - x_{n-p})$$

В §12 главы III рассмотрен вариант метода Зейделя.
Одна из возможных интерпретаций метода Зейделя решения линейных алгебраических систем и более общих операторных уравнений заключается в следующем. Если требуется решить уравнение вида (1), то при условии, что

$$A=A_1+A_2$$

и в предположении, что существует обратный оператор к оператору $(I-A_1)$, уравнение (1), можно переписать в эквивалентном виде

$$x = (I - A_1)^{-1} \cdot A_2 x + (I - A_1)^{-1} \cdot f,$$

после чего к полученному уравнению применить метод последовательных приближений

$$x_{m+1} = (I - A_1)^{-1} A_2 x_m + (I - A_1)^{-1} f, \qquad (m = 1,2,...),$$

который можно также записать в виде

$$y_{m+1} = A_1 y_{m+1} + A_2 y_m + f, \qquad (m = 1,2,\ldots)$$

Т.е. по сути, применять метод последовательных приближений для решения операторного уравнения вида

$$x = Dx + h, \tag{12}$$

$D = (I - A_1)^{-1} \cdot A_2$, $h = (I - A_1)^{-1} \cdot f$.

Именно такую интерпретацию допускает классический метод Зейделя решения линейных систем алгебраических уравнений.

Суть излагаемого в данном параграфе варианта метода Зейделя, для построения приближений, сходящихся к точному решению операторного уравнения, состоит в том, что к полученному уравнению (12) предлагается применить метод ускорения сходимости приближений рассмотренный в §2. Здесь также исследовано влияние порядка метода Зейделя на скорость сходимости приближений.

По всем вышеприведенным методам автором диссертации созданы программные продукты, позволяющие не только проиллюстрировать, но и значительно расширить результаты теоретических исследований. В частности, автором применялись язык программирования TURBO PASCAL, математические среды MathCad. В результате расчетов накоплен большой экспериментальный материал, заметная часть из которого приведена в настоящей диссертации.

Заключение

Проведенные в диссертационной работе исследования направлены на разработку новых методов решения операторных уравнений, описывающих экономические модели (модель межотраслевого баланса). Получены следующие научные и практические результаты.

1. Разработан и апробирован на большом количестве примеров итерационный метод решения системы линейных алгебраических уравнений вида $x = Ax + f$ с квадратной матрицей A, в случае, когда наибольшее по модулю собственное значение матрицы A, больше чем единица.

2. Предложен метод получения двусторонних оценок точного решения x^* операторного уравнения вида $x = Ax + f$, в случае, когда спектральный радиус не обязательно меньше единицы, а также подходы к уточнению полученных оценок. Метод проиллюстрирован соответствующими примерами.

3. Получен синтез методов ускорения сходимости монотонных приближений к решению x^* уравнения вида $x = Ax + f$ и однопараметрического итеративного агрегирования.

4. Разработан и апробирован на большом количестве примеров вариант метода ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида $x = Ax + f$, в котором упрощена задача поиска начальных приближений.

5. Разработан и апробирован на большом количестве примеров вариант метода Зейделя, позволяющий строить двусторонние приближения к точному решению уравнения вида $x = Ax + f$.

6. Составлена библиотека программ на языке программирования TURBO PASCAL, которая позволяет реализовывать полученные в данной работе методы и алгоритмы.

Таким образом:

- Разработаны новые методы решения операторных уравнений, описывающих экономические модели (модель межотраслевого баланса), обладающих высокой скоростью сходимости последовательностей к точному решению данных уравнений, а также способностью сходится к точному решению даже в тех случаях, когда спектральный радиус оператора больше единицы.
- Разработан комплекс программ на языке программирования TURBO PASCAL, реализующих эти алгоритмы.

Основные результаты опубликованы в работах:

1. Плюта А.И. Об одном варианте метода ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида $x = Ax + f$ //Теоретические и прикладные проблемы современной физики: Материалы Региональной научной конференции. - Ставрополь: Изд-во СГУ, 2002. - С.255-262.
2. Плюта А.И. О некоторых методах получения оценок точного решения x операторных уравнений вида $x = Ax + f$ в случае, когда спектральный радиус $p(A)$ не обязательно меньше единицы// Международная летняя школа молодых ученых «Итерационные методы и матричные вычисления». Лекции приглашенных лекторов и тезисы докладов молодых ученых. -Ростов-на-Дону: РГУ, 2002. - С.482-486.
3. Плюта А.И., Стеценко В.Я. «Гибрид» методов ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида $x = Ax + f$ и однопараметрического итеративного агрегирования//Ученые записки физико-математического факультета Ставропольского государственного университета. - Ставрополь: СГУ, 2002. - С.79-85.
4. Плюта А.И., Стеценко ВЛ. Об одном варианте метода Зейделя. //Журнал «Математическое моделирование». - 2003.—Т. 15, №12. - С29-36

5. Стеценко В.Я., Плюта А.И. Обзор и реализация на ЭВМ методов решения систем линейных и нелинейных уравнений. Учебное пособие. - Ставрополь: Изд-во СГУ, 2003 .-71с.
6. Стеценко ВЛ., Плюта А.И. О некоторых методах построения монотонных приближений к решению линейных операторных уравнений.// Теоретические и прикладные проблемы современной физики. Материалы региональной научной конференции. - Ставрополь, 2002.-С.281-284.
7. Стеценко В.Я., Плюта А.И. Об одном итерационном методе решения систем линейных алгебраических уравнений вида $x = Ax + f$ с квадратной матрицей A //Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. - Воронеж: ВГУ, 2003. -С.250-251.
8. Стеценко В.Я., Кириллова Л.Н.,Плюта А.И. Новые оценки сверху спектрального радиуса матричных и интегральных операторов//Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Труды участников. -Ростов-на-Дону, 2002.-С. 160-161.

Изд. лицхерия ИД № 05975 от 03.10.2001 Подписано в печать 9.02.2004
Формат 60х84 1/16 Усл.печ.л. 1,22 Уч.-изд.л. 0,77
Бумага офсетная Тираж 100 экз. Заказ 8

Отпечатано в Издательско-полиграфическом комплексе
Ставропольского государственного университета.
355009, Ставрополь, ул.Пушкина, 1.

№ - 3116